GROUPE C

E.N.S. SEVRES & ULM — 1979

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, nous supposons donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires réelles (en abrégé v.a.r.) que nous considérerons.

Par ailleurs, nous aurons souvent à considérer l'espace $\mathbb{R}^k$ comme un espace vectoriel que nous supposerons toujours muni d'une base orthonormée, désignée par $(\vec{i})$.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^k$ seront toujours considérées par rapport à cette base de référence, et souvent désignées par $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Nous utiliserons aussi, indifféremment, la notation matricielle

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_k \end{pmatrix}, \text{ ou encore } \vec{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

le symbole ^{t} désignant la transposée de la matrice à 1 ligne et n colonnes.

Plus généralement, si A désigne une matrice à p lignes et q colonnes, la matrice ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, qui est donc une matrice à q lignes et p colonnes.

D'autre part, comme il est d'usage, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$, $< \vec{x}, \vec{y} >$ désigne le produit scalaire de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Les parties I *et* II *sont indépendantes.*

I

On considère k v.a.r. $V_1, V_2, \ldots, V_k$, et on désigne par $\vec{V}$ le vecteur aléatoire dont les coordonnées dans la base $(\vec{i})$ de référence sont $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

On appelle matrice de covariance du vecteur $\vec{V}$, la matrice K_V à k lignes et k colonnes dont le terme général d'indice i, j est égal à la covariance des v.a.r. V_i, V_j.

1° Dans l'espace $\mathbb{R}^k$, on considère le système de vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_k}$ définis par leurs coordonnées dans la base $(\vec{i})$ de la manière suivante :

$$\vec{e_j} = {}^t(1, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1),$$

c'est-à-dire que toutes les coordonnées de $\vec{e_j}$ valent 1, sauf celle d'indice j qui vaut 0.

On suppose que le vecteur $\vec{V}$ est égal à $\vec{e_j}$ avec une probabilité p_j strictement positive, et que les nombres $(p_j)_{j=1}^k$ satisfont à $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

a. Étudier la loi des v.a.r. V_i, coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i})$, en précisant leur espérance et leur variance et calculer explicitement la matrice K_V de covariance du vecteur $\vec{V}$.

b. Soit $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ un vecteur de $\mathbb{R}^k$.

Exprimer en fonction de K_V, la variance de la v.a.r. $< \vec{x}, \vec{V} >$.

c. Déduire, du fait que $V_1 + V_2 + \ldots + V_k = k - 1$ p.s., que 0 est une valeur propre de K_V, dont on explicitera un vecteur propre associé.

d. On pose $U_1 = 1 - V_1, \ldots, U_k = 1 - V_k$.

Quelle est la loi du vecteur $\vec{U} = {}^t(U_1, U_2, \ldots, U_k)$?

Comparer les matrices de covariance de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

En déduire que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de la matrice K_V est de dimension 1.

e. (Les résultats de cette question ne sont pas indispensables pour la suite.)

On suppose $k = 3$ et $p = p_2 = p_3 > 0$.

Montrer qu'on peut construire une base orthonormale de vecteurs propres pour K_V. (On explicitera les vecteurs propres et les valeurs propres.)

2° On pose

$$\vec{T} = {}^t\left(\frac{V_1}{\sqrt{p_1}}, \frac{V_2}{\sqrt{p_2}}, \ldots, \frac{V_k}{\sqrt{p_k}}\right) \text{ et } \sqrt{p} = {}^t(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_k}) ;$$

K_T désigne la matrice de covariance du vecteur $\vec{T}$.

. . . / . . .

a. Montrer que K_T peut s'écrire sous la forme :

$$K_T = I_k - \sqrt{p}\ {}^t\sqrt{p}$$

où I_k désigne l'identité sur $\mathbb{R}^k$.

b. Montrer que le vecteur $\sqrt{p}$ est un vecteur propre de K_T associé à une valeur propre que l'on précisera.

c. On désigne par L l'hyperplan $< \sqrt{p}, \vec{x} > = 0$.

Montrer que tout vecteur de L est un vecteur propre de K_T associé à la valeur propre 1.

En déduire toutes les valeurs propres de K_T.

d. Soit $(\vec{f}) = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_{k-1}})$ une base orthonormée de l'hyperplan L et P la matrice $k \times k$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_{k-1}}, \sqrt{p}$.

Calculer explicitement les matrices ${}^tPP$ et ${}^tP\,K_T\,P$.

e. On pose $\vec{Y} = {}^tP\,\vec{T}$. Calculer la matrice de covariance de $\vec{Y}$.

En déduire que la dernière coordonnée de $\vec{Y}$ est p.s. constante.

II

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1°On pose

$$F(t) = \int_0^t p(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad G(t) = \int_0^t x\,p(x)\,dx.$$

a. Calculer $G(t)$ et étudier sa limite quand t tend vers $+\infty$.

b. Montrer que si φ est une fonction positive, bornée par M, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,p(x)\,dx$ converge.

c. On désigne par $F(\infty)$ la limite de $F(t)$ quand $t \to +\infty$.

Que vaut $F(\infty)$?

2°On pose

$$\Phi_K(t) = \int_{-K}^{K} \cos(tx)\,p(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \Theta_K(t) = \int_{-K}^{K} x \sin(tx)\,p(x)\,dx.$$

a. Établir une relation fonctionnelle entre Θ_K et Φ_K.

b. Expliciter $\Phi_K(t+s)$ et montrer que

$$\Phi_K(t+s) - \Phi_K(t) + s\,\Theta_K(t)$$

est majorée en module, indépendamment de t, pour $|s| \leqslant 1$, par $C\,s^2$, où C est une constante convenable.

En déduire que Φ_K est dérivable, et préciser l'équation différentielle satisfaite par Φ_K et sa dérivée Φ_K'.

3°On se propose d'étudier les solutions de l'équation différentielle

$$(1) \qquad t\,f(t) + f'(t) = \lambda_K \sin(Kt)$$

où λ_K est une constante.

a. Étudier les solutions de l'équation (1) associées à $K = 0$.

b. En déduire, en faisant intervenir une intégrale définie, la forme générale des solutions de l'équation (1).

c. Calculer $\Phi_K(t)$ en fonction de F(K) et $p(K)$, et montrer que lorsque K tend vers $+\infty$, $\Phi_K(t)$ converge vers la fonction $\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.

4°On introduit les fonctions

$$I(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \cos[t(x^2+y^2)]\,p(x)\,p(y)\,dx\,dy$$

$$J(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \sin[t(x^2+y^2)]\,p(x)\,p(y)\,dx\,dy$$

et $$H(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx^2)\,p(x)\,dx + i\int_{\mathbb{R}} \sin(tx^2)\,p(x)\,dx.$$

.../...

a. En utilisant les coordonnées polaires, calculer $I(t)$ et $J(t)$.

b. Comparer $H^2(t)$ à $I(t)$ et $J(t)$.

En déduire la valeur de la fonction $H(t)$ en admettant que son argument est une fonction continue de t, à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

III

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, on désigne par E le symbole d'espérance associée à P.

Si Z est une v.a.r., on appelle fonction caractéristique de Z, l'application $\Psi_Z(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\Psi_Z(t) = E[\cos(tZ)] + i\ E[\sin(tZ)], \qquad \text{encore notée } E[\exp itZ].$$

1°*a.* Soit X une v.a.r. dont la loi admet pour densité la fonction $p(x)$ de la deuxième partie.

Calculer les fonctions caractéristiques des v.a.r. X et X^2.

b. Soit (X_1, X_2) un couple de v.a.r. dont la loi est normale.

On suppose que

$$E(X_1) = E(X_2) = 0, \qquad \text{var } X_1 = \text{var } X_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{cov}(X_1, X_2) = \rho$$

où $|\rho| \neq 1$.

Expliciter la densité de la loi du couple (X_1, X_2).

Montrer que si λ et μ sont deux nombres réels tels que $\mu \neq 0$, le couple $(X_1, \lambda X_1 + \mu X_2)$ a une loi normale dont on explicitera la densité.

2° Dans toute cette question, U, V, X, Y désignent quatre v.a.r. indépendantes, de même loi de densité $p(x)$.

Soient α, β deux nombres réels tels que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

On définit

$$Z_1 = \frac{\alpha U + \beta V}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad Z_2 = \frac{\alpha V - \beta U}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$T_1 = \frac{\alpha X + \beta Y}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad T_2 = \frac{\alpha Y - \beta X}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

a. Déduire de la première question que les v.a. Z_1 et Z_2 (resp T_1 et T_2) sont indépendantes et préciser leur loi.

Montrer l'indépendance des quatre v.a. Z_1, Z_2, T_1, T_2.

b. On désigne par $g_{(\alpha,\beta)}$ la fonction caractéristique de la v.a.

$$T_2^2 = \frac{(\alpha Y - \beta X)^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Montrer qu'elle est indépendante de (α, β).

On pose $\hat{T} = \frac{(UY - VX)^2}{U^2 + V^2}$. Calculer la fonction caractéristique de $\hat{T}$, après avoir montré que la valeur au point t de cette fonction est égale à

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g_{(u,v)}(t)\ p(u)\ p(v)\ du\ dv.$$

On pourra utiliser dans cette question la propriété suivante : si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^4$, telle que

$$\iiiint_{\mathbb{R}^4} |f(u, v, x, y)|\ du\ dv\ dx\ dy < +\infty$$

alors

$$\iiiint_{\mathbb{R}^4} f(u, v, x, y)\ du\ dv\ dx\ dy = \iint_{\mathbb{R}^2} du\ dv \left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v, x, y)\ dx\ dy \right).$$

c. On considère les vecteurs aléatoires, définis sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\vec{Z} = {}^t(Z_1, Z_2) \quad \vec{T} = {}^t(T_1, T_2) \quad \vec{\eta}_1 = {}^t(Z_1, T_1) \quad \vec{\eta}_2 = {}^t(Z_2, T_2)$$

et la matrice aléatoire symétrique W, définie par :

$$W = \begin{pmatrix} <\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1> & <\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2> \\ <\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2> & <\vec{\eta}_2, \vec{\eta}_2> \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de norme 1.

i. Exprimer à l'aide des vecteurs $\vec{Z}$ et $\vec{T}$ la v.a. ${}^t\vec{a}\ W\vec{a}$ et préciser sa loi.

ii. On désigne par W^{-1} l'inverse de la matrice W.

Montrer que si $\vec{a}$ est un vecteur de norme 1, la fonction caractéristique de la v.a. $1 / {}^t\vec{a}\ W^{-1}\ \vec{a}$ est indépendante de $\vec{a}$, et la calculer.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail